Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Саратовской области
«Вольский медицинский колледж им. З.И. Маресевой»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО УД МАТЕМАТИКА

Специальность 33.02.01 Фармация

очно – заочная форма обучения

г.Вольск
2024 г.

На отделении переподготовки специалистов для студентов, обучающихся по индивидуальному плану, предусмотрено выполнение контрольной работы.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать полное усвоение курса по темам, которые представлены в учебно-тематическом плане. Каждый студент должен выполнить один вариант контрольной работы.

Студенты, фамилии которых начинаются с букв:

А, Е, Л, Р, Х, Э - выполняют вариант № 5
Б, Ж, М, С, Ц, Ю - вариант № 4
В, З, Н, Т, Ч, Я - вариант № 3
Г, И, О, У, Ш - вариант № 2
Д, К, П, Ф, Щ - вариант № 1

Работы, выполненные не по своему варианту, проверяться не будут. После каждой главы есть задания для самоподготовки их нужно выполнить, все студенты сначала выполняют задания для самоподготовки всех глав, а затем контрольную работу.

Все решения оформляется на бумаге стандартного формата А-4 (210х290 мм) в печатном виде.

В конце работы необходимо указать, какой литературой студент пользовался при её выполнении.

После каждой главы есть задания для самоподготовки их нужно выполнить (прорешать),

Работа сдается в учебную часть **НЕ ПОЗДНЕЕ 30 НОЯБРЯ**

Оформление титульного листа:

Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Саратовской области
«Вольский медицинский колледж им. З.И.Маресевой»

Контрольная работа по УД
Математика
специальность 33.02.01 Фармация
Вариант № _____

Выполнил: обучающийся группы №____
Фамилия Имя Отчество

г.Вольск
2024г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ПРЕДЕЛ И СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

1.1. Определение функции

Современное определение числовой функции было дано русским математиком Н.И Лобачевским в 1834 г и немецким математиком Л.Дирихм в 1837 году.

Зависимость переменной **y** от переменной **x** называется функцией, если каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**.

Переменную **x** называют независимой переменной или аргументом, а переменную **y** – зависимой переменной.

Значением **y,** соответствующее заданному значению **x**, называют значением функции.

Если переменная **y** является функцией от переменной **x**, то записывают:

y = *f*(x).

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Все значения, которые принимает функция ***f*(x),** образуют область значения функции.

1.2. Предел и свойства функции. Основные теоремы о пределах

Число **A** называется пределом функции **y =*f*(x)** при **x**, стремящемся x_0 $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A\right)$, любого положительного числа ε можно указать такую окрестность точки $\mathbf{x_0}$,т.е. интервал, содержащий точку $\mathbf{x_0}$, что для всех **x** $\neq \mathbf{x_0}$ этой окрестности выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

При вычислении пределов пользуются основными теоремами и следствиями:

Теорема №1. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Теорема №2. Функция f(x) при **x** $\to \mathbf{x_0}$ не может иметь двух пределов.

Теорема №3. Предел алгебраической суммы (или разности) конечного числа функций равен сумме (или разности) их пределов.

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x\to x_0} f_2(x) \pm \lim_{x\to x_0} f_3(x)$$

Теорема №4. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций. $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$

Теорема №5. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}; \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) \neq 0$$

Следствие №1

Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$; n – натуральное число.

Следствие№2

Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to x_0}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Алгоритм решения примеров

<u>Пример№1</u>

Вычислить: $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2 - 2x + 4)$

Используя теоремы №1, 3 и следствие №2 находим:

$\lim\limits_{x\to 2}(5x^2 - 2x + 4) = \lim\limits_{x\to 2} 5x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 2x + \lim\limits_{x\to 2} 4 = 5\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 2\lim\limits_{x\to 2} x + 4 = 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 4 = 20 - 4 + 4 = 20$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2 - 6x + 3) = 7$

<u>Пример№2</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 12x + 32}{x^2 - 8x}$$

Используя теоремы №5,3,1 и следствие №2 находим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-12x+32}{x^2-8x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-12x+32\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-8x\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-12\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}32}{\lim\limits_{x\to 1}x^2-8\lim\limits_{x\to 1}x}=$$

$$\frac{1^2-12\cdot 1+32}{1^2-8\cdot 1}=\frac{1-12+32}{-7}=\frac{21}{-7}=-3$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-12x+32}{x^2-8x}$ = -3

Вычисление пределов функций в тех случаях, когда непосредственное применение теорем о пределах не привет к определенным результатам. Если функция у **=** $\boldsymbol{f}$**(x)** при х = x_0 не определена, но предел существует. В этом случае необходимо выполнить некоторые преобразования функции.

<u>Пример№3</u>

Вычислить: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16x+60}{x-6}$

Применяя теоремы №1,3,5

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-16x+60}{x-6}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}\left(x^2-16x+60\right)}{\lim\limits_{x\to 6}\left(x-6\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}x^2-16\lim\limits_{x\to 6}+\lim\limits_{x\to 6}60}{\lim\limits_{x\to 6}x-\lim\limits_{x\to 6}6}=\frac{6^2-16\cdot 6+60}{6-6}=$$

$\frac{36-96+60}{0}=\frac{-8+8}{0}=\frac{0}{0}$ - неопределенность вида, но предел существует.

Чтобы найти предел, необходимо числитель разложить на множители, для этого найти дискриминант (Д). Квадратный трехчлен: αx^2 + вх + с =0

$\alpha x^2 + в x + c = \alpha (x-x_1)(x-x_2)$

Д = $в$ - 4α · с, $x_1 = \frac{-в+\sqrt{Д}}{2a}$; $x_2 = \frac{-в-\sqrt{Д}}{2a}$

$x^2 - 16x + 60 = 0$

Д $=(-16)^2 - 4 \cdot 1\cdot 60 = 256 - 240==16=4^2$

$x_1 = \frac{16+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{16+4}{2}=\frac{20}{2}=10$

$x_2= \frac{16-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{16-4}{2}=\frac{12}{2}=6$

$x^2 - 16x + 60= (x - 10)(x - 6)$

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-16x+60}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-10)}{(x-6)}=\lim_{x\to 6}(x-10)=\lim_{x\to 6}x-\lim_{x\to 6}10=6-10=-4$$

Ответ : $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-16x+60}{x-6}=-4$

Пример №4

Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{12-x}-\sqrt{x+12}}{x}$

Применяя теоремы №1,3,5 имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{12-x}-\sqrt{x+12}}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{12-x}-\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+12}}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{\sqrt{12-0}-\sqrt{12+0}}{0}=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{12}}{0}=\frac{0}{0}$$

- неопределенность вида, но предел существует.

Для нахождения предела необходимо преобразовать дробь $\dfrac{\sqrt{12-x}-\sqrt{x+12}}{x}$, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\left(\sqrt{12-x}+\sqrt{12+x}\right)$ и сделать необходимые преобразования и упрощения, применяя теоремы №5,3 получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{12-x}-\sqrt{12+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{12-x}-\sqrt{12+x}\right)\left(\sqrt{12-x}+\sqrt{12+x}\right)}{x\left(\sqrt{12-x}+\sqrt{12+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{12-x-(12+x)}{x\left(\sqrt{12-x}+\sqrt{12+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{12}-x-\cancel{12}-x}{x(\sqrt{12-x}+\sqrt{12+x}}=\lim_{x\to 0}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(-2)}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{12-x}+\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{12+x}}=\frac{-2}{\sqrt{12-0}+\sqrt{12+0}}=$$

$$\frac{-2}{\sqrt{12}+\sqrt{12}}=\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{12}}=-\frac{1}{\sqrt{12}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{12-x}-\sqrt{x+12}}{x}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Пример№5

Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3{,}5x+7}{7x+3}$

Пределы числителя и знаменателя при x→∞ - бесконечно большие величины. Преобразуем данную функцию разделив все слагаемые числителя и знаменателя на x, применяя теоремы №5,3,1 и следствия №2 имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3{,}5x+7}{7x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3{,}5\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{7}{x}}{\frac{7\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3{,}5+\frac{7}{x}}{7+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3{,}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}}=$$

$$\frac{3{,}5+\frac{7}{\infty}}{7+\frac{3}{\infty}}=\frac{3{,}5+0}{7+0}=\frac{3{,}5}{7}=0{,}5$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3{,}5x+7}{7x+3}=\frac{3{,}5}{7}=0{,}5$

<u>Пример№6</u>

Вычислить: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2+x}$

Применяя теоремы №5,3,1 и следствия №2 имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2+x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+3x\right)}{\lim_{x\to 0}\left(x^2+x\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^3+3\lim\limits_{x\to 0}x}{\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}x}=\frac{0^3+3\cdot 0}{0^2+0}=\frac{0}{0}$$

- неопределенность вида, но предел существует. Чтобы найти предел необходимо преобразовать дробь, вынести за скобки **x** и в числителе, и в знаменателе, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(x^2+3\right)}{\cancel{x}(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\lim\limits_{x\to 0}3\right)}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to o}1}=\frac{0^2+3}{0+1}=\frac{3}{1}=3$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2+x}=3$

ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

2.1. Приращение аргумента и функции

Пусть функция **f(x)** определена на некотором интервале.

x и $\mathbf{x_0}$ – два произвольных значения аргумента из этого интервала.

Разность между двумя значениями аргумента называется приращением аргумента:

$\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x_0} \rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{x_0}+\Delta\mathbf{x}$, т.е значение аргумента **x** можно определить через $\mathbf{x_0}$ и его же

приращение - $\Delta\mathbf{x}$

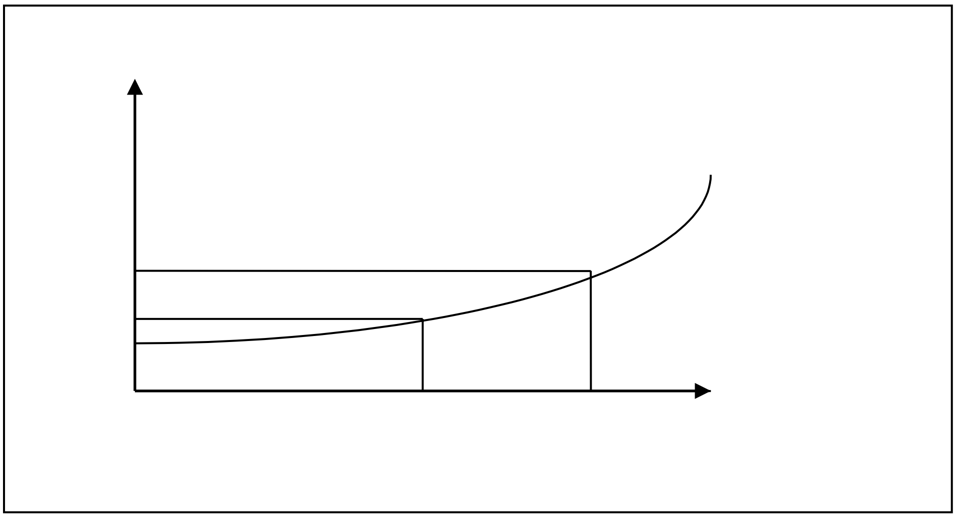


Рис.1. График функции y=f(x)

Как видно из рисунка №1 приращение аргумента Δx, изображается приращением абсциссы. Точки графика функции y= f(x), а приращение функции Δf- приращением ординаты этой точки.

2. 2. Определение производной

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю, называется производной функции f(x) в точке X0:

$$F'(x)= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (1)$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Выражение «продифференцировать функцию» равносильно выражению «найти производную функцию».

2.3. Физический и геометрический смысл производной

Исходя из определения производной, можно сказать:

1). Мгновенная скорость прямолинейного движения есть производная от пути S по времени t.

$\vec{U}_{\text{мгн.}} = S'(t)$ (2)

2). Мгновенная скорость химической реакции есть производная от функции X по аргументу t:

$\vec{U}_{\text{мгн.}} = x'(t)$ (3)

<u>**Вывод:**</u> производная функции y= f(x) по аргументу **x** есть мгновенная скорость изменения функции y= f(x). В этом состоит физический смысл производной.

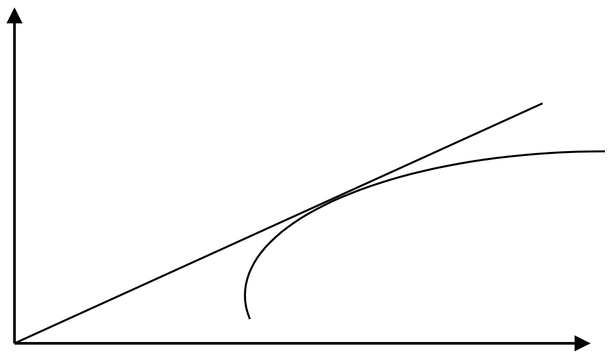


Рис. 2. График функции y=f(x)

Рассмотрим график функции y= f(x) (рис.2). Построим на этом графике точку M. В данной точке M проведем касательную к графику функции y= f(x).

Угловой коэффициент касательной:

$K = \operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ (4)

Вывод: угловой коэффициент касательной к графику функции y= f(x) в данной точке равен значению ее производной в точке касания. В этом состоит геометрический смысл производной.

2.4. Основные правила дифференцирования и производные функций

А) Производная постоянной величины равна нулю.

$$f(x)=(C)'=0 \qquad (5)$$

Пример № 1: $f(x)=(5)'=0$

Постоянной считается любое число.

Б) Производная аргумента по самому аргументу равна единице:

$$f(x)=(x)'=1 \qquad (6)$$

Пример № 2: $f(x)=-2x$; $f'(x)=(-2x)'=-2$

В) Производная алгебраической суммы (или разности) дифференцируемой функций равна алгебраической суммы (или разности) производных этих функций:

$$(U(x)\pm V(x))'=U'(x)\pm V'(x) \qquad (7)$$

Пример №3: $f(x)=14x-8$; $f'(x)=(14x-8)'=(14x)'-(8)'=14-0=14$

Г) Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и производной второй функции на первую.

$$f'(x)=(U(x)*V(x))'=U'(x)*V(x)+ U(x)*V'(x) \qquad (8)$$

Пример № 4: $f(x)=(x+21)(x+1)$ $f'(x)=((x+21)(x+1))'=(x+21)'(x+1)+(x+21)(x+1)'=(1+0)(x+1)+(x+21)(1+0)=1(x+1)+(x+21)1=x+1+ x+21=2x+22$

Д) Производная частного (дроби) двух функций равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя дифференцируемой функции, а числитель есть разность между произведениями производной числителя на знаменатель и производной знаменателя на числитель:

$f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$; V(x) $\neq 0$

f′(x)= $\left(\frac{U(x)}{\mathrm{V(x)}}\right)' = \frac{U'(x) * V(x) - U(x) * V'(x)}{V^2(x)}$ (9)

Пример № 5: f(x)=$\frac{15x+6}{4x-10}$

f′(x)= $\left(\frac{15x+6}{4x-10}\right)' = \frac{(15x+6)'(4x-10)-(15x+6)(4x-10)'}{(4x-10)^2} = \frac{15(4x-1)-(15x+6)*4}{(4x-10)^2}$

$= \frac{60x-150-60x-24}{(4x-10)^2} = \frac{-174}{(4x-10)^2}$

Е) Производная степенной функции равна:

f(x)=x^n ; f′(x)=(x^n)′=nx^{n-1} (10)

Пример № 6: f(x)= -4x^4

f′(x)=(-4x^4)′= -4*4*x$^{4-1}$= -16x^3

Ж) Производная квадратного корня из Х:

f(x)=$\sqrt{x}$; f′(x)=($\sqrt{x}$)′=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (11)

2.5. Дифференциал функции. Дифференциал суммы (или разности) произведения и частного функции.

Если функция y=f(x) дифференцируема в точке x_0,то выражение вида f(x_0)*Δx,где Δx=x-x_0 называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy(x_0)$,которые ввел Лейбниц Г.В. Дифференциал независимой переменной dx считается равным ее приращению Δx,поэтому $df(x_0)=f'(x_0)\ \Delta x=\ f'(x_0)dx$

Пример № 9:

А)найти дифференциал функции $f(x)=x^3+2x$

$f'(x)=(x^3+2x)'=3x^2+2$

$df(x)=(3x^2+2)dx$

Б) Вычислите дифференциал функции

$f(x)=x^3-2x$ в точке x=1

$f'(x)=(x^3-2x)'=3x^2-2$

$f'(1)=3x^2-2=3*1^2-2=1$

$df(x)=dx$

2.6. Применение производной функции

Понятие производной – Одно из важнейших в математике. С помощью производной, учитывая ее механический смысл (скорость изменения некоторого процесса) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной), можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшее и наименьшее значение и т.д.

Определение промежутков монотонности функции с помощью производной

Теорема 1. *Если дифференцируемая функция y=f(x) возрастает (убывает) в данном интервале, то производная этой функции не отрицательна (не положительна в этом интервале)*

Теорема 2. *Если производная функции y=f(x)положительна (отрицательна) в некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает)*

Пример 1. Показать, что функция $y=2x^3+3x^2-12x+1$ убывает в интервале(-2, 1).

Решение. Достаточно убедиться в том, что производная функции при $-2 < x < 1$ отрицательна. Находим

$y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

Множитель $x+2$ на интервале (-2, 1) положителен, а множитель$x-1$ отрицателен. Значит, производная во всех точках указанного интервала отрицательна, а, следовательно, функция убывает.

1. Вычисляют производную $f'(x)$данной функции
2. Находят точки, в которых $f'(x)$равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$
3. Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы являются интервалами монотонности.
4. Исследуют знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x)>0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает; если же $f'(x)<0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

Теорема 3. (необходимый признак экстремума).

Если $x=a$ *является точкой экстремума функции* $y= f(x)$ *и производная в этой точке существует, то она равна нулю:* $f(a)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производная функции $f(x)$ в точке $x=a$, не может быть отличной от нуля, так как в случае $f'(a)>0$ функция $f(x)$ возрастала бы в некотором интервале, содержащем точку a, а в случае $f'(a)<0$ - убывала бы в некотором интервале, содержащем точку a, другими словами, при $f'(a)>0$ и $f'(a)<0$ функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке a, что противоречит условию. Значит, $f'(a)=0$.

Геометрически необходимый признак экстремума означает, что *если $x=ф$ – точка экстремума функции $y= f(x)$, то касательная* (в том случае, когда она существует) *к графику этой функции в точке (а; f(a)) параллельна оси Ох*

Легко убедиться в том, что необходимое условие экстремума функции не является достаточным, т.е. из этого факта, что $f'(a)=0,$ вовсе не следует, что функция $f(x)$ имеет экстремум при $x=a.$

Обращение первой производной в нуль является необходимым, но не достаточным условие экстремума.

Теорема 4. (достаточный признак экстремума). *Если производная f(x) при переходе x через а меняет знак, то а является точкой экстремума функции f(x).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при переходе *х* через *а* производная меняет знак с плюса на минус. Тогда слева от *а* производная положительна и, следовательно, здесь находится интервал возрастания функции. Справа же от *а* производная отрицательна, и поэтому здесь находится интервал убывания функции. Точка отделяющая интервал возрастания функции от интервала убывания, есть точка максимума.

Аналогично доказывается, что если при переходе *х* через *а* производная меняет знак с минуса на плюс, то *а* является точкой минимума.

Точка *а* – критическая, так как $f'(a)=0.$ Слева от этой точки, т.е. при $x<a$, имеет $f'(x)>0$; касательная к кривой образует с осью *Ох* острый угол и функция возрастает.

Справа от этой точки, т.е. при $x>a$, имеем $f'(x)<0$; касательная к кривой образует с осью *Ох* тупой угол и функция убывает. При $x=a$ функция переходит от возрастания к убыванию, т.е. имеет максимум.

Для функции, при переходе через критическую точку $x=a$ производная не меняет знак и в этой точке нет экстремума.

Таким образом, исследование производной $y'= f'(x)$ позволяет во многом изучить поведение функции $y= f(x).$ При этом нужно понимать, что в своих рассуждениях мы с помощью известного графика функции находили значения производной на тех или иных участках кривой. На практике же, конечно, поступают наоборот: рассматривают производную некоторой функции и с ее помощью исследуют характер функции.

Основные моменты исследования.

1. Находят производную *f'(x).*

2. Находят все критические точки из области определения функции.

3. Устанавливают знаки производной функции при переходе через критические точки и выписывают точки экстремума.

4. Вычисляют значения функции *f(x)* в каждой экстремальной точке.

Пример 1.

$y = x^2 + 2$

Решение. 1. Находим производную: $y = (x^2 + 2) = 2x$

2. Приравниваем её к нулю: $2x = 0$, откуда $x = 0$ –критическая точка.

3. Определяем знак производной при значении $x<0$, например при $x = -1$: $y_{x=-1} = 2(-1) = -2$. Определяем знак производной при $x>0$, например, при $x = 1$: $y_{x-1} = 2*1 = 2$. Так как при переходе через $x=0$ функция имеет минимум.

4. Находим минимальное значение функции, т.е. $f(0)=0^2 + 2 = 2$.

1.$y = x^2 – x -6$ 2. $y=\frac{1}{2}x^2 – x – 4$

3.$y = 1 – 6x – x^2$ 4. $y= x^3 – 6x + 1$

5. $y= \frac{1}{3}x^3 + x^2 – 3x$ 6. $y= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

7. $f(x) = ax^2+bx+c$ 8. $y= (2x+1)\sqrt[3]{x-2}$

9. $f(x) = 2^x x^{-2}$ 10. $y= 5^x + 5^{-x}$

2.7. Производная второго порядка

Если функция y=f(x) дифференцируемая на некотором промежутке, то ее производная y=f'(x) также является функцией, заданной на этом промежутке.

Если $y=f'(x)$дифференцируема, то ее производную называют второй производной функции $y=f(x)$ и обозначают $y=f''(x)$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}$,т.е

$f''(x)=(f'(x))'$ (12)

Вторая производная $f''(x)$выражает скорость изменения первой производной, т.е ускорение изменения функции $y=f(x)$ в точке x.

Если $x(t)$ координата прямолинейна движущейся в точки в момент времени t, то $x''(t)$- ускорение точки в этот момент времени, т.е $a(t)=x''(t)$

Пример №7:

Найти вторую производную функцию:

$y=x^5+\frac{1}{3}x^4+2x^3+4$ в точке $x=-1$

$y'=(x^5+\frac{1}{3}x^4+2x^3+4)'=5x^{5-1}+\frac{1}{3}*4x^{4-1}+2*3x^{3-1}+0=5x^4+\frac{4}{3}x^3+6x^2$

$y''=(5x^4+\frac{4}{3}x^3+6x^2)'=5*4*x^{4-1}+\frac{4}{3}*3x^{3-1}+6*2x^{2-1}=20x^3+4x^2+12x$

$y''(-1)=20x^3+4x^2+12x=20*(-1)^3+4*(-1)^2+12*(-1)=-20+4-12=-16-12=-28$

Ответ: $y''=20x^3+4x^2+12x$; $y''(-1)=-28$

Пример № 8: По прямой линии движутся две точки. Закон движения первой точки задан функцией $y=f(x)$, а закон движения второй точки функций $y=g(x)$. Определите, в какие моменты времени точки имеют одинаковое ускорение, если:

$f(t)=t^4+2t^3+5t+1$ и $g(t)=12t^2$

$f'(t)=(t^4+2t^3+5t+1)'=4t^{4-1}+2*3t^{3-1}+5+0=4t^3+6t^2+5$

$g'(t)=(12t^2)'=12*2t^{2-1}=24t$

$f''(t)=(4t^3+6t^2+5)'=4*3t^{3-1}+6*2t^{2-1}+0=12t^2+12t$

$g''(t)=(24t)'=24$

Так как по условию задачи точки имеют одинаковое ускорение, то

$12t^2+12t=24$ или $t^2+t-2=0$

Решением данного квадратного уравнения являются t=1 и t=-2, где t=-2- посторонний корень. Откуда в момент времени 1 сек точки имеют одинаковое ускорение.

ГЛАВА 3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

3.1. Из истории интегрального исчисления

Многие замечательные достижения математиков Древней Греции в решении задач на вычисление площадей плоских фигур, а так же вычисление объемов тел связанны с применением метода исчерпывания, предложенным Евдоксом Книдским (ок.408-ок. 355 до н.э). Архимед высоко оценил результаты и усовершенствовал их. Он предвосхитил многие идеи интегрального исчисления, но потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи нашли чёткое выражение и были доведены до уровня исчисления.

Символ $\int$ введен в 1675 году Лейбницем. Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова – *summa*). Само слово интеграл придумал Бернулли Я. в 1690 г. Вероятно, оно происходит от латинского *integro,* которое переводится, как «приводить в прежнее состояние», восстанавливать. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее «примитивная функция», которое ввёл в 1797г. Лагранж.

3.2. Первообразная и её свойства

Функция $y = F'$ называется первообразной для функции **y=*f*(x)** на некотором промежутке, если $F' = \boldsymbol{f}(x)$ для всех x и y этого промежутка.

Если **y**=F(x) – первообразная для функции **y=*f*(x)** на некотором промежутке, то существует бесконечно много первообразных для **y=*f*(x)** на этом промежутке и все они имеют вид: y=F(x)+C (1)

Где C – постоянный множитель интегрирования.

Геометрически это означает (рис.3), что графики всех первообразных можно получить из графика какой-нибудь одной из них сдвигом этого графика вдоль оси О**y.** Выбором постоянной C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

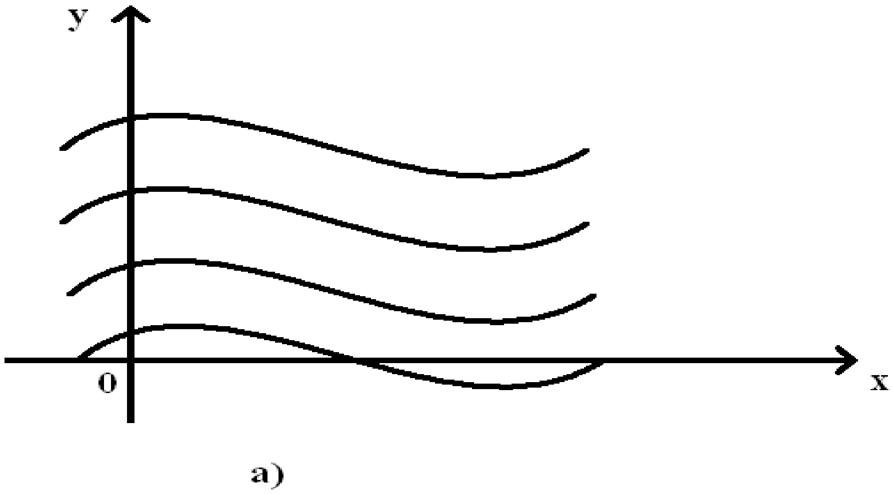


Рис.3. График первообразной

Процесс нахождения первообразных называют интегрированием или нахождением интеграла.

3.2. Неопределенный и определенный интегралы и их свойства

Совокупность первообразных $F(x)+C$ для данной функции $f(x)$ или данного дифференциала $f(x)dx$ называют неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначают $\int f(x)\,dx$

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (2)$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$(\int f(x)dx)'=f(x) \qquad (3)$$

2) Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражения:

$$d\int f x)dx=f(x)dx \qquad (4)$$

3) Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и постоянному множителю интегрирования:

$$\int dF(x)=F(x)+C \qquad (5)$$

то $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$, где k и b – постоянные, $k \neq 0$

4) Постоянный множитель k можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (6)

5) Интеграл от алгебраической суммы (или разности) конечного числа функций равен алгебраической сумме (или разности) интервалов от каждой функции в отдельности.

$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ldots)\, dx = \int (f_1(x))dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)\ dx \pm \ldots$ (7)

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

4. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + C$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc \sin x + C$

11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = arc\, tg\, x + C$

<u>Пример № 1</u>

Для функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $(0,+\infty)$ найти первообразную функцию, график которой проходит через точку М(9;-2).

<u>Решение:</u>

Т.к. $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $(0;+\infty)$, то функция $y = 2\sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на этом промежутке. Выберем из этого семейства ту функцию график, которой проходит через точку

M (9;-2). Постоянная C должна удовлетворять уравнению $2\sqrt{9}$ + C = -2. Тогда функции вида $y = 2\sqrt{x} + c$ также является первообразная для данной функции: $y = 2\sqrt{9} + 2 = 2 * 3 + 2 = 8 \Rightarrow C = -8.$

Следовательно, $y = 2\sqrt{x} - 8$ – искомая первообразная.

Ответ: $y = 2\sqrt{x}$-8

Пример №2

Вычислить $\int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7)\, dx$

По свойству 5 и 4 имеем

$\int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7)\, dx$=

$\int 2x^3\, dx - \int 3x^2\, dx + \int 2x\, dx - \int 7\, dx = 2\int x^3\, dx - 3\int x^2\, dx + 2\int x\, dx - 7\int dx$

=

Применяем ф-лы интегрирования 2 и 1

=2$(\frac{x^{3+1}}{3+1}) - 3(\frac{x^{2+1}}{2+1})$+2$(\frac{x^{1+1}}{1+1}) - 7x + C = 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3}$+2$\frac{x^2}{2}$ –

-$7 * 1 + C = \frac{x^4}{2} - x^3 + x^2 - 7 + C$

Ответ: $\int (2x^3 - 3x^2 - 2x - 7)\, dx$=$\frac{x^4}{2} - x^3 + x^2 - 7 + C$

Пример № 3

Найти $\int (5\cos x - 3x^2 + \frac{1}{x})\, dx$

Решение:

Применяя свойство 4 и 5 имеем:

$$\int (5\cos x - 3x^2 + \frac{1}{x})\, dx = 5\int \cos x\, dx - 3\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} =$$

Применяем формулы интегрирования 2,3 и 6 получаем:

=$5\sin x - 3(\frac{x^{2+1}}{2+1})$

$+\ln|x| + C = 5\sin x - 3\frac{x^3}{3} + \ln|x| + C = 5\sin x - -x^3 + \ln|x| + C$

Ответ: $\int (5\cos x - 3x^2 + \frac{1}{x})\, dx = 5\sin x - x^3 + \ln|x| + C$

Пример №4

Найти $\int \frac{2X+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx$

Решение:

Преобразуем подынтегральное выражение, а затем применяем свойства 4 и 5 получаем:

$$\int \frac{2X+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx = \int (\frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int (2x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}})dx = 2$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}) + x + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

Применяя формулы интегрирования 1,2 получаем:

$$= 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2 * \frac{2}{3} * x^{\frac{3}{2}} + x + 2x^{\frac{1}{2}} + C == \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x + 2\sqrt{x} + C$$

Ответ: $\int \frac{2X+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x + 2\sqrt{x} + C$

<u>Пример№5</u> Найти

$\int ctg^2\, x\, dx$

<u>Решение:</u>

Преобразуем подынтегральное выражение:

$\int ctg^2\, x\, dx =$

$$\int \frac{cos^2 x}{sin^2 x}dx = \int \frac{1-sin^2 x}{sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{sin^2 x} - \int dx =$$

Применяем формулы интегрирования 1 и 8 получаем:

$= - ctgx - x + C$

Ответ: $\int ctg^2\, x\, dx = - ctgx - x + C$

<u>Пример № 6</u>

Найти $\int e^{3x+2}\, dx$

<u>Решение</u>:

Так как $\int e^x\, dx = e^x + C$, то согласно св-ву интегрирования №3 имеем:

$3\int e^{3x+2}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

Ответ: $\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

3.2. Определенные интегралы и его свойства

Определённый интеграл есть число, его значение зависит от вида функции $f(x)$ и значений верхнего нижнего пределов и обозначают: $\int_a^b f(x)\,dx$

Основные свойства определённого интеграла

1) Определенный интеграл от суммы (или разности) конечного числа функции заданный на отрезке [a,b], равен сумме (или разности) определенных интегралов от каждой функции в отдельности:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots f_n(x)\,dx = \int_a^b f_1\,(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ \ldots \int f_n(x)\,dx \quad (8)$$

2) Постоянный множитель к подынтегральной функции можно вынести за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (9)$$

3) Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл сохранит абсолютную величину и изменит свой знак но противоположный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (10)$$

4) Если пределы интегрирования равны между собой, то определённый интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad (11)$$

Связь между определённым и неопределенным интегралами устанавливает формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (12)$$

Значение определённого интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Вертикальная черта с верхним и нижним пределами, стоящие справа от символа функции F(x) называется знаком двойной подставки.

<u>Пример № 7</u>

Вычислить: $\int_1^2 x^2\,dx$

Решение:

Используя формулу (12) получаем:

$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_1^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{(2)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Ответ: $\int_1^2 x^2\,dx = 2\frac{1}{3}$

Пример № 8

Вычислить: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

По (9) основной формуле интегрирования и по (12) формуле получаем:

$$= tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\ tg\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}0 = 1$$

Ответ: 1

Пример № 9

Вычислить: $\int_{-2}^3 (2x^2 + x^2 - 5)\,dx$

Решение:

Согласно свойства интегрирования №1 и №2 имеем:

$\int_{-2}^3 (2x^2 + x^2 - 5)\,dx = 2\int_{-2}^3 x^2\,dx + \int_{-2}^3 x^2\,dx - 5\int_{-2}^3 dx =$

Используя формулы интегрирования 1,2 имеем:

$$= 2\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\Big|_{-2}^{3} + \frac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_{-2}^{3} - 5x\Big|_{-2}^{3} = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3} - 5x\Big|_{-2}^{3} =$$

Используя ф-лу (12) получаем:

$=2(\frac{(3)^3}{3}) - 2(\frac{(-2)^3}{3}) + \frac{(3)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} - 5 * 3 - 5(-2) =$

$=2(\frac{27}{3}) - 2\left(\frac{-6}{3}\right) + \frac{27}{3} - \frac{(-6)}{3} - 15 + 10 = 18 + 4 + 9 + 2 - 5 = 33 - 5 = 28$

Ответ: 28

Пример № 10

Вычислить: $\int_0^8 (\sqrt{2x} - \sqrt[3]{x})\,dx$

Решение:

Преобразуем, т.е переведём корни в степени, и используем свойства интегрирование № 2 имеем:

$$\int_0^8 (\sqrt{2x} - \sqrt[3]{x})\,dx = \int_0^8 ((2x)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}})\,dx = \int_0^8 (2x)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx =$$

Используем формулы интегрирования № 2 имеем:

$$= \frac{(2x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^8 = \frac{2\sqrt{(2x)^3}}{3}\Bigg|_0^8 - \frac{3(\sqrt[3]{x^4}}{4}\Bigg|_0^8 =$$

Используем формулу (12) получаем:

$$= \frac{2\cdot\sqrt{(2\cdot 8)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{(2\cdot 0)}^3}{3} - \frac{3\sqrt[3]{(8)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{(0)}^4}{4} = \frac{2\cdot 64}{3} - 0 - \frac{3\cdot 16}{4} - 0 = \frac{128}{3} - 0 - \frac{48}{4} - 0 = 42{,}6 - 0 - 12 - 0 =$$

=42,6-12=30,6

Ответ: 30,6

Пример № 11

Вычислить: $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx$

Решение:

Используя свойства определённого интеграла №1, №2 имеем:

$$\int_1^4 (1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2})\,dx =$$

$$= \int_1^4 dx + + 5\int_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 dx + 5\int_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

Применяя формулы интегрирования 1 и 2 имеем:

$$= x\Big|_1^4 + 5(\frac{x^{1+1}}{1+1})\Big|_1^4 + \frac{3}{2}(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1})\Big|_1^4 = x\Big|_1^4 + \frac{5}{2}x^2\Big|_1^4 + \frac{3}{2} * \frac{2}{3}x^2\Big|_1^4 = (4-1) + \frac{5}{2}(4^2 - 1) +$$

$$+\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 47{,}5$$

Ответ: 47,5

3.4. Физический и геометрический смысл определённого интеграла

Определённый интеграл $\int_{t_0}^{T}\vec{\vartheta}(t)\,dx$ есть перемещение прямолинейно движущееся со скоростью $\vec{\vartheta}(t)$ материальной точки за промежуток времени $[t_0,T]$, Если $\vec{\vartheta}(t) \geq 0$ на отрезке $[t_0,T]$,т.е. направление движения совпадает с направлением оси, то ее перемещение совпадает с путём, пройденным за этот промежуток времени.

В этом случае, определённый интеграл $\int_{t_0}^{T} d\vec{\vartheta}(t)$ можно рассматривать как путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_0,T]$. В общем случае, пройденный путь равен: $\int_{t_0}^{T}|\vec{\vartheta}(t)|\,dx$

<u>Пример № 12</u>

Скорость движения точки изменяется по закону $\vec{\vartheta} = (3t^2 + 2t + 1)$ $м/сек$. Найти путь, пройденный точкой, за 10 сек от начала движения.

<u>Решение:</u>

Согласно условию, $f(t) = (3t^2 + 2t + 1)$, $t_0 = 0$, T=10

Используя формулу $\int_{t_0}^{T}\left|\overrightarrow{\vartheta(t)}\right|dx$, находим:

$$S = \int_0^{10}(3t^2 + 2t + 1)dt = 3\int_0^{10} t^2\,dt + 2\int_0^{10} t\,dt + \int_0^{10} dx = 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\Bigg|_0^{10} + 2\left(\frac{t^{1+1}}{1+1}\right)\Bigg|_0^{10} + t\Bigg|_0^{10} = 3\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{10} + 2\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{10} + t\Bigg|_0^{10} = (t^3 + t^2 + t)\Bigg|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110$$

Ответ: 1110 метров.

<u>Пример № 13</u>

Скорость движения точки $\vec{\vartheta} = (9t^2 - 8t)$ $м/сек$. Найти путь, пройденный точкой за четверную секунду.

<u>Решение:</u>

Согласно условию, $f(x) = (9t^2 - 8t)$, $t_0 = 3, T = 4$

30

$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = 9\int_3^4 t^2 dt - 8\int_3^4 t dt = 9(\frac{t^{2+1}}{2+1})\Big|_3^4 - 8(\frac{t^{1+1}}{1+1})\Big|_3^4 = 9(\frac{t^3}{3})\Big|_3^4 -$
$8(\frac{t^2}{2}) 3t^3 \Big|_3^4 - 4t^2\Big|_3^4 = (3t^2 - 4t^2)\Big|_3^4 = 83\text{м}$

3.9. Геометрический смысл определённого интеграла

Фигура aABb, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, прямыми x=a, x=b осью O_x, называется криволинейной традицией (рис.4). Её площадь $S = \int_a^b f(x)dx$

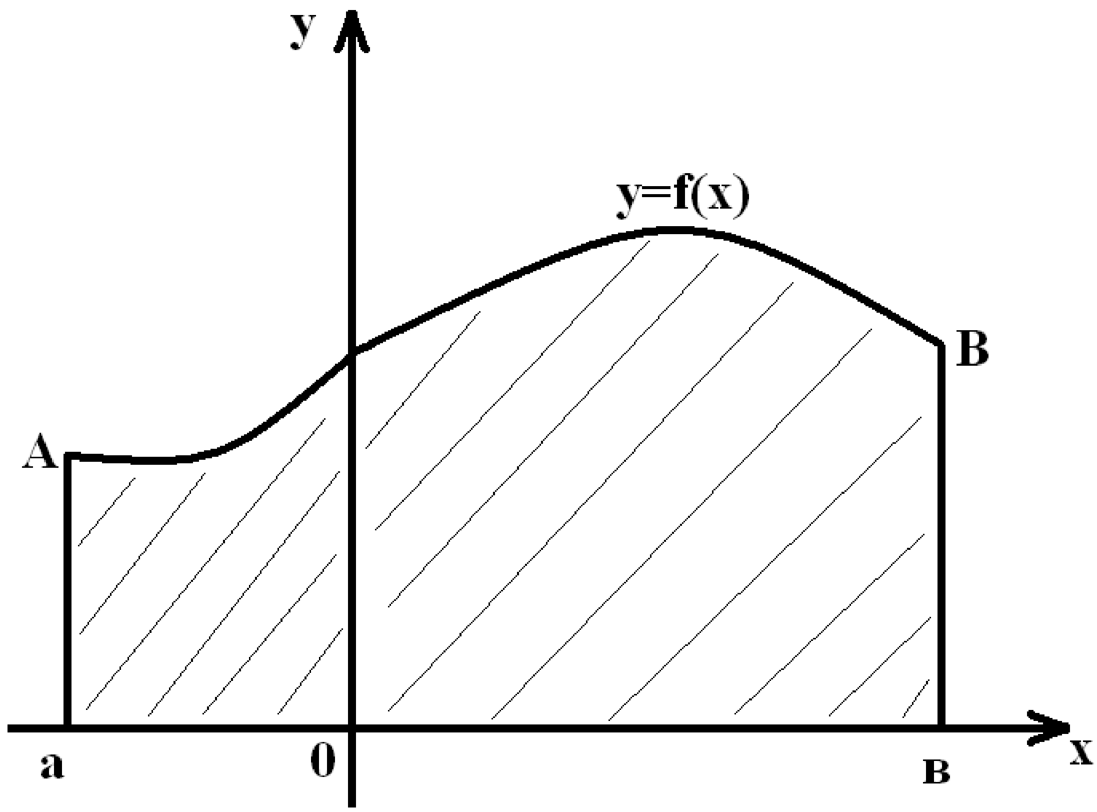


Рис.4. График криволинейной трапеции.

Пример № 14

Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{-1}{x}$ и прямыми $y = 0, x = -1, x = -2$

Решение:

Фигура представляет собой криволинейную трапецию

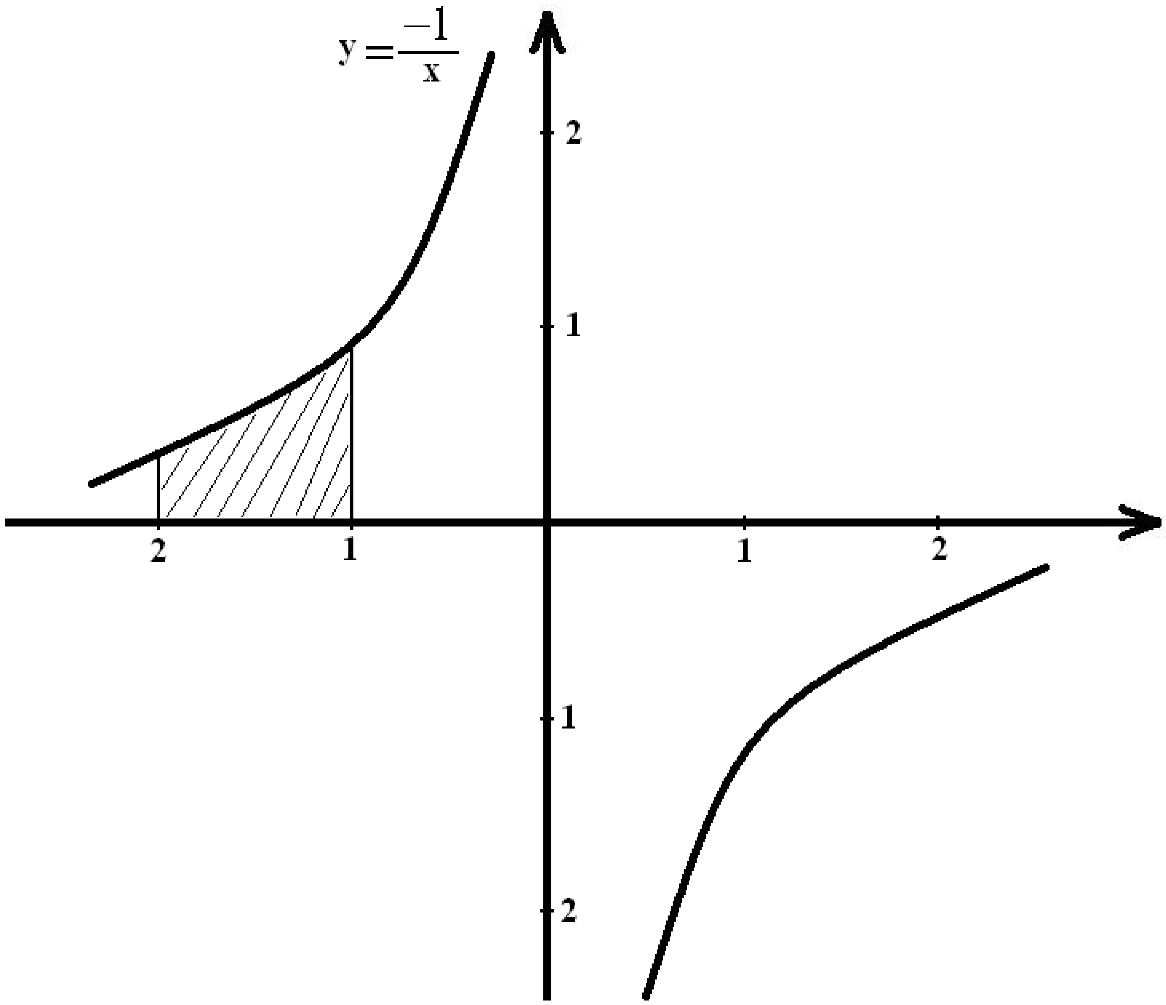


Рис.5 График криволинейной трапеции.

Поэтому, применяя формулу $S=\int_a^b f(x)dx$, получаем :

$$S=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x}=-ln|x|\Big|_{-2}^{-1}=-(ln1-ln2)=ln2$$

Ответ: ln 2

3.5. **Алгоритм нахождения интеграла дробно-рациональной функции.**

Интегрирование дробно-рациональной функции.

Пример 1

$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

Найти неопределенный интеграл.

1. Определение вида дроби: правильная или неправильная.

Чему равна старшая степень многочлена:

$$\int \frac{(x^2 - 19x + 6)dx}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)}$$

Старшая степень числителя равна двум.

Старшая степень знаменателя равна трём. Старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя, значит, дробь является правильной.

2. Разложим знаменатель на множители. Смотрим на наш знаменатель:

$(x-1)(x^2 + 5x + 6)$

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$D = 25 - 24 = 1$$

Дискриминант больше нуля, значит, трехчлен действительно раскладывается на множители:

Общее правило: всё, что в знаменателе можно разложить на множители

$$\sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$
$$x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

– раскладываем на множители $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

Начинаем оформлять решение:

$$\int \frac{(x^2 - 19x + 6)dx}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)} = \int \frac{(x^2 - 19x + 6)dx}{(x-1)(x+2)(x+3)} = (*)$$

3. Обратим внимание на подынтегральную функцию:

$$\frac{(x^2 - 19x + 6)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Так как мы не знаем какие числа или выражения находятся в числителе, то следует представить её в несколько дробей с разными знаменателями.

4. $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{x^2 - 19x + 6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

Такое разложение существует и единственно.

Коэффициенты неизвестны, отсюда и название – метод неопределенных коэффициентов.

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Действия должны быть направлены на то, чтобы выяснить, чему же они равны.

Итак, начинаем преобразование:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

5. В левой части приводим выражение к общему знаменателю:

$$\frac{A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

По определению равенства дробей, составим уравнение:

$$A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)=x^2-19x+6$$

6. В левой части раскрываем скобки.

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

Для того чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена.

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

7. Коэффициенты необходимо внести в скобки

$(A+B+C)x^2$ $+(5A+2B+C)x$ $+(6A-3B-2C)=x^2$ $-19x+6$. Получили равенство, из которого $(A+B+C)x^2=1x^2$; $(5A+2B+C)x=-19x$ и $6A-3B-2C=6$. Все равенства выявлены из одного. Объединим в систему, выполним преобразования к решению уравнений и решим систему линейных уравнений.

Сначала разыскиваем старшие степени:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

И записываем соответствующие коэффициенты в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases}$$

Записываем соответствующие коэффициенты во второе уравнение системы:

Решаем систему методом Гаусса

(1) Из первого уравнения выражаем и подставляем его во 2-е и 3-е уравнения системы. На самом деле можно было выразить (или другую букву) из другого уравнения, но в данном случае выгодно выразить именно из 1-го уравнения, поскольку там самые маленькие коэффициенты.

(2) Метод Крамера предполагает составить определители и решить их.

1. Вычислим определитель системы.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$ =-4 + 3 – (-10-6) – 15 – 12 -1 +16 – 27= -12

2. Заменив 1 столбец свободными членами, т.е. числами после знака «=», вычислим определитель переменной А

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -19 & 2 & 1\\ 6 & -3 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-19 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-19 & 2\\ 6 & -3\end{vmatrix}$$ =-4 + 3 – (38-6) + 1 (57-12) = -1 – 32 +45 = 12

$A=\frac{\Delta A}{\Delta}$ =-1

3. Аналогично заменим 2 столбец главного определителя и найдем определитель переменной В.

$$\Delta B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & -19 & 1\\ 6 & 6 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-19 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}$$ =38-6 – (10-6) – 10 – 6 = 32

$$B=\frac{\Delta B}{\Delta}=\frac{32}{-12}=-\frac{8}{3}=-2\frac{2}{3}$$

4.Поочередно действуя, определим и С.

$$\Delta C=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 2 & -19\\ 6 & -3 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -19\\ -3 & 6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5 & -19\\ 6 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & 2\\ 6 & -3\end{vmatrix}$$ =12 -57-12-114-15-12= -198

$$C=\frac{\Delta C}{\Delta}=\frac{-198}{-12}=16,5$$

5. По формуле первообразной (3) $\frac{1}{x}\to\ln|x|$ завершим вычисление дробно-рационального интеграла.

Пример 2 Найти интеграл.

Решение:

$$\int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2-x-12)} = \int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x-4)(x+3)} = (*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3} = \frac{(43x-67)}{(x-1)(x-4)(x+3)}$$

$$A(x-4)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-4) = 43x-67$$

$$A(x^2-x-12) + B(x^2+2x-3) + C(x^2-5x+4) = 43x-67$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+2B-5C=43 \\ -12A-3B+4C=-67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+7B=43 \\ -16A-7B=-67 \end{cases} \Rightarrow -12A=-24$$

$$A=2; B=5; C=-7$$

$$(*) = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-4} - \frac{7}{x+3} \right) dx = 2\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C, \text{ где } C = const$$

4.1 Основные понятия теории вероятностей

Классическое определение вероятности

Теория вероятностей – раздел математики, в котором по данным вероятностям одних случайных событий находят вероятности других событий, связанных количественным образом с первым. Теория вероятностей изучает также случайные величины и случайные процессы. Одна из основных задач теории вероятности состоит в выяснение закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов. Математический аппарат теории вероятности используется при изучении массовых явлений в науке и технике. Методы теории вероятности играют важную роль при обработке статистических данных.

Теория вероятности – наука, изучающая законы, управляющие случайными явлениями.

Примеры случайных явлений:

- бросаем монету, нельзя утверждать, как она упадет:
  гербом или решкой;
- вынимаем карту из колоды, нельзя сказать, какой она будет масти;
- количество забракованных изделий ОТК на заводе.

Эти примеры относятся к области случайных явлений. Случайным событием (или просто «событием») называется всякий факт, который в результате опыте «бросание монеты» может произойти (а может и не произойти) событие А – «выражение герба».

Теория вероятности позволяет нам измерять количественно степень «правдоподобия» (или вероятности) различных событий. Ясно, что не все случайные события одинаковы вероятны, что среди них бывают более или менее вероятные. Например, опыт «бросание игральной кости». Какое событие в этом опыте более вероятно?

А – «выпадение шести очков»;

В-«выпадение четного числа очков».

Событие может быть маловероятным, но возможным. Например, в книге 500 страниц, на какой-либо из них напечатана формула. Раскрыв книгу наугад, маловероятно, что мы наткнемся на формулу.

Вероятность-количественная оценка возможности появления данного случайного события. Вероятность возникновения случайного события есть отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

P= $\frac{m}{n}$, где P- вероятность данного случайного события, m- количество благоприятных исходов для данного события , n- общее число исходов для данного события. Эту формулу называют классическим определением вероятности.

Однако это определение весьма неполно, что может подтвердить простой пример.

Если посчитать вероятность того, что при бросании двух игральных костей по крайне мере на одной выпадет 6. Очевидно, что каждая кость может выпасть шестью различными способами. Число всех возможных случаев равно 6^6 =36; число благоприятствующих случаев равно 11 (6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6, 5-6, 4-6, 3-6, 2-6, 1-6).Таким образом вероятность равна 11/36.Мы знаем, что это правильное решение.

Но ведь можно рассуждать и по-другому. Числа очков , выпавшие на обеих костях, могут образовать $6 \cdot \frac{7}{2} - 21$ различных комбинаций.6 из них благоприятствующие(6-6, 6-5, 6-4, 6-3, 6-2, 6-1). Вероятность равна 6/21. Этот результат явно отличается от предыдущего. Однако, пользуясь нашим определением, мы не сможем найти ошибку.

Таким образом, придется дополнить определение: вероятность-это отношение числа случаев, благоприятствующих изучаемому событию, к полному числу возможных случаев, при условии, что эти случаи равновероятны.

Единица измерения в теории вероятности-вероятность достоверного события.

Достоверным называется такое событие, которое в данном опыте непременно произойдет. Например, «выпадение не более шести очков при бросании игральной кости».

Невозможным называется событие, которое в данном опыте вовсе не может произойти. Например, «выпадение отрицательного числа очков при бросании игральной кости».

Вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равно 0.

Вероятность случайного события А обозначается Р(А), значит, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Вероятность любого события А может быть подсчитана как отношение числа случаев, благоприятных событию А, к общему числу случаев.

Р(А)=$m_{A/n}$, где n- общее число случаев; m_A-число случаев, благоприятных событию А (обеспечивающих его появление).

Рассмотрим пример 1.

В ящике - 20 шаров, из них 9 зеленых, 6 красных и 5 черных. Какова вероятность взять наугад красный шар?

Решение:

Событие А заключается в том, что взятый произвольно шар красного цвета.

P_A=m_A/n=6/20=3/10=0,3=30%/

Ответы можно записывать по-разному: в виде обыкновенной дроби, в виде десятичной дроби, количеством процентов.

Пусть производится опыт, который имеет ряд возможных исходов A_1, A_2..., A_n/

События $A_1, A_2, \dots A_n$ называются *несовместными* , если они взаимно исключают друг друга, т.е. не могут появится вместе.

События A_1, A_2,...A_n называют *равновозможными*, если условия опыта обеспечивают одинаковую возможность (вероятность) появления каждого из них.

События A_1 , A_2 ,…A_n образуют полную группу , если они исчерпывают собой все возможные исходы , т.е. не может быть так , чтобы в результате опыта ни одно из них не произошло.

События A_1, A_2,… A_n обладают всеми тремя свойствами , т.е. а)несовместны; б) образуют полную группу и в) равновозможные, то они называются *случаями* , а про опыт говорят, что он сводится к схеме случаев .

Два события А и В называют *независимыми***,** если появление одного из них никак не влияет на появление другого т.е. условная вероятность события А в продолжении, что В произошло, совершенно такая же, как и без этого предположения, что В произошло, совершенно такая же, как и без этого предположения: Р(А/В) =Р(А).

В противном случае события А и В называются *зависимыми***.**

4.2. Теорема сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность того что произойдет одно из двух несовместны событий (все равно, какое именно), равна сумме вероятностей этих событий.

Запишем это правило в виде формулы. Пусть А и В – два несовместимых события. Тогда

Р (А или В) = Р(А) + Р(В).

Это правило обобщается на любое число событий.

Рассмотрим пример.

В ящике- 20 шаров, из 9 них зеленых, 6 красных, и 5 черных. Какова вероятность того, что взять наугад красный или зеленый шар?

Решение:

Событие А заключается в том, что взятый произвольно шар красного цвета.

Событие В заключается в том, что взятый произвольно шар зеленого цвета.

$P_a = \frac{a}{n} = 6/20$;

$p_a = \frac{в}{n} = 9$*/20;*

P= 6/20+ 9/20=15/20=3/4=0,75=75%

Ответ: 75%

Вероятность может быть записана в виде обыкновенной дроби, в виде десятичной дроби или в процентах.

Из теоремы сложения вероятностей вытекают некоторые важные следствия:

1) Если события $A_1, A_2, \ldots, A_3$ несовместимы и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1.

2) Если А – какое-то событие, а А– противоположное ему (состоящее в не появлении А), то Р (А)+Р(А)= 1, т.е. сумма вероятностей противоположных равна 1.

На последней формуле основан очень распространенный в теории вероятности прием «перехода к противоположному событию». Часто бывает, что вероятность интересующего нас события А вычислить

трудно, вероятность противоположного ему- $\vec{A}$ – легко. Тогда вычисляют А(АМесто для уравнения.) и вычитают его из единицы:

$P(\vec{A}) = 1 - P(\vec{A})$.

4.3. Теорема умножения вероятностей.

Вероятность совмещения двух событий (т. е совместного появления того и другого) равна вероятности одного из них, умноженной на вероятность другого, вычисленную при условии, что первое произошло. В виде формулы это правило запишется так:

P (A и B) = P(a) – P (B/A),

Где P(B/A) – так называемая условная вероятность события B, вычислительная при условии, что событие A произошло.

При использовании правила умножения вероятностей совершенно все ровно, какое из событий считать «первым», а какое «вторым». Правило умножения можно записать в виде

P (A и B) = P(B)*P (A/B).

Пример 2.

Бросили 2 игральных кубика. Какова вероятность появление двух пятерок?

Решение:

1-й способ. Рассмотрим два события: события A – на первом кубике выпала 5, событие B= на втором кубике – тоже 5.

$P_а = 1/6, P_в$=1/6

$P_{АиВ} = 1/6 *$ 1/6 = 1/36.

4.4. Формула полной вероятности

Предположим, что событие A может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий H_1, H_2…, Hn, называется *гипотезами*. Тогда справедлива следующая формула полной вероятности:

$P(A)=P(A/H_1)\ P(H_1) +P(A/H_2) +\ldots+P(A/H_n)\ P(H_n)$,

т.е. вероятность события A равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Докажем это. По условию, событие A может произойти лишь вместе с одним из событий H_1, H_2…, H_n. Следовательно,

$$A=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n.$$

Так как события H_1…Hn попарно несовместимы, то несовместны и события AH_1, AH_2, …, AH_n. Поэтому, применяя теорему сложения, находим

$P(A) = P(AH_1) = P(AH_2)+..+P(AH_N).$

Заменив каждое слагаемое $P(AH_i)$ на $P(A/H_i)$P(H_i), получим

P(A)=P(A/$H_i)P(H_i) + P(H_I) + P(A/H_2)$P($H_2$)+…+P(A/$H_n$)P($H_n$)

2. Имеется три партии ламп по 20,30,50 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равна для каждой партии соответственно 0,7;0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из ста данных ламп проработает заданное время?

Решение. Пусть событие А состоит в том, что взятая наугад лампа проработает заданное время, а H_1, H_2 и H_3 – гипотеза, что лампа принадлежит соответственно первой, второй или третьей партии. Тогда P($H_1) =$ 0,2, P($H_2) =$ 0,3, P($H_3) = 0{,}5.$ Вероятность того, что лампа проработает заданное время, составляют P(A/$H_1) = 0{,}7,$ P(A/$H_2) = 0{,}8,$ P(A/$H_3) = 0{,}9$ (по условию). По формуле полной вероятности находим $P(A) = P(A/H_1)$P(H_1)+P(A/$H_2)P(H_2) + P(A/H_3)$P(H_3)=0,7 $\cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 + +0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}83.$

3. Имеется две одинаковых урны. Первая содержит 2 черных 3 белых шара, вторая – 2 черных и 1 белый шар. Сначала произвольно выбирают урну, а затем из нее наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что будет выбран белый шар?

Решение. Пусть события А состоит в том, что белый шар извлечен из произвольной урны, а H_1 и H_2 – гипотезы, что он принадлежит соответственно первой или второй урне. Тогда вероятность P(H_1)=P($H_2) = \frac{1}{2},$ вероятность того, что белый шар принадлежит первой урне P(A/H$_1$)= $\frac{3}{5}$ а вероятность того, что белый шар принадлежит второй урне, P(A/H_2)=$\frac{1}{3}$. По формуле полной вероятности получим $P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P\left(\frac{A}{H_2}\right)P(H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15}.$

Глава 5. Задачи, применяемые в деятельности фармацевта.

5.1 Проценты - одно из математических понятий, которые часто встречаются в повседневной жизни. Как решать задачи на проценты? Единственно, что нужно запомнить – что такое один процент. Это понятие - и есть главный ключ к решению задач на проценты, да и к работе с процентами вообще. Один процент – это одна сотая часть какого-то числа. Если говорится о цене, один процент – это одна сотая часть цены. Если о скорости, один процент – это одна сотая часть скорости. Понятно, что само число, о котором идёт речь, составляет всегда 100%. Подоходный налог с зарплаты берется в размере 13 %, то есть 13 сотых от зарплаты. Пряжа «Lana Grace Medio», в которую входит 25% шерсти и 75% акрила. Это означает, что пряжа содержит 25 сотых шерсти, то есть меньше чем на половину состоит из натурального сырья. 3,2 % жира в молоке означает, что 3,2 сотых массы продукта составляет жир (или, другими словами, в каждых 100 граммах этого продукта содержится 3,2 грамма жира).

Типы задач на проценты

Мир задач на проценты бесконечен, эти задачи интересны, увлекательны, развивают логику, сообразительность, побуждают мыслить обучающегося. Задач на проценты существует несколько типов.

Нахождение процента от числа.

Чтобы найти процент от числа, надо проценты перевести в дробь и данное число умножить на полученную дробь.

Нахождение числа по его проценту. Чтобы найти число по данному значению его процентов, надо проценты перевести в дробь и данное число разделить на полученную дробь.

Задача 1. В салициловой мази 2 % содержится салициловой кислоты 0,5 грамма. Сколько грамм весит тюбик?

Решение. $\frac{0,5}{2\%} \cdot 100\% = 25$г

Ответ: 25г

Начисление сложных процентов. Начисление процентов на проценты.

Задача 2. Цена на препарат «Аркоксиа» таблетки 90 мг 28 шт 1323 рубля.

В августе её цена повысилась на 10%. Однако, препарат стали покупать хуже, вынужденное снижение цены составило 8%. Какова окончательная цена препарата «Аркоксиа»?

Решение. Проценты всегда считаются от чего-то. На сколько рублей подняли цену? 10% от 1323 рубля - это 132,3 рублей. То есть, препарат стал стоить 1455,3 рублей. А теперь нам надо снизить цену на 8 % от1455, 30 рублей. Это 116,42 рублей. Следовательно, после первого удешевления препарат стал стоить 1338,88 рубля.

Проценты считаются каждый раз от новой цены. От последней. Так бывает практически всегда. Если в задаче на последовательное повышение-понижение величины открытым текстом не сказано, от чего считать проценты, надо считать их от последнего значения.

5.2. Задачи на концентрацию растворов.

Рассмотрим некоторые методы решения задач на смешивание растворов:

Старинный метод решения задач или «метод креста»

В 17 веке был издан первый печатный учебник математики Леонтия Магницкого, в котором представлен разбор задач с

«Правилом креста» называют диагональную схему правила смешения для случаев с двумя растворами. Слева на концах отрезков записывают исходные массовые доли растворов. На пересечении отрезков – заданная, а справа на их концах записываются разности между исходными и заданной массовыми долями. Получаемые массовые части показывают, в каком отношении надо слить исходные растворы.

Задача 3. У некоторого человека были продажные масла: одно ценою 10 гривен за ведро, другое же 6 гривен за ведро. Захотелось ему сделать из этих двух масел, смешав их, масло ценою 7 гривен за ведро. Какие части этих двух масел нужно взять, чтобы получить ведро масла стоимостью 7 гривен?

Решение. Приводим старинный способ решения этой задачи. Друг под другом пишутся стоимости имеющихся масел, слева от них и примерно посередине — стоимость масла, которое должно получиться после смешения. Соединим написанные числа черточками.

Меньшую цену вычтем из цены смешанного масла и результат поставим справа от большей цены. Затем из большей цены вычтем цену смешанного масла, а то, что останется, напишем справа от меньшей цены. Получится такая картина: написанные числа черточками, получим такую картину:

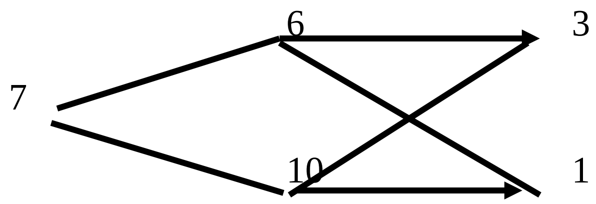


Рис.4

Л. Ф. Магницкий

Делается заключение, что дешевого масла нужно взять втрое больше, чем дорогого, то есть для получения 1 ведра масла ценою 7 гривен нужно взять дорогого масла ¼ ведра, а дешевого ¾ ведра.

Задача 4. Имеется два раствора. Первый содержит 10% соли, второй — 30% соли. Из этих двух растворов получили третий раствор массой 200 г, содержащий 25% соли. На сколько граммов масса первого раствора меньше массы второго?

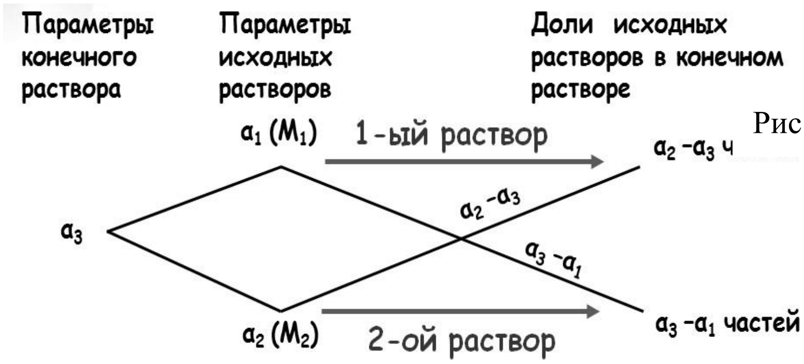
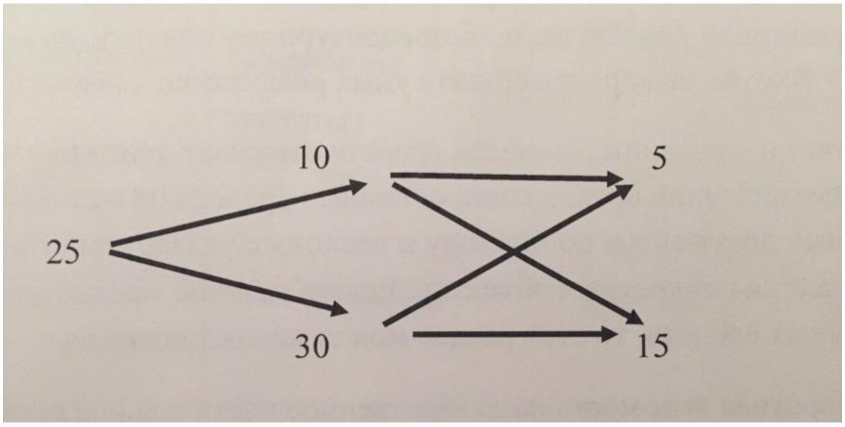


Рис. 4

Друг под другом пишутся процентные содержания первого и второго раствора, слева от них и примерно посередине – процентное содержание третьего раствора. Рассмотрим пары 25 и 10; 25 и 30. В каждой паре из большего числа вычтем меньшее, и результат запишем в конце соответствующей стрелочки. Получится такая схема: (Рис. 5)



Из нее делается заключение, что 10%-ного раствора следует взять 5 частей, а 30%-ного – 15 частей. 200:(15 + 5) = 10 г приходится на одну часть.

Таким образом, для получения 200 г 25%-ного раствора нужно взять 10%-ного раствора $5 \cdot 10 = 50$ г, а 30%-ного – $10 \cdot 15 = 150$ г. Первого раствора надо взять на 150 – 50 = 100 г меньше массы второго.

Ответ: на 100 г.

5.3 Алгебраический метод

Под алгебраическим методом решения задач понимается такой метод решения, когда неизвестные величины находятся в результате решения уравнения или системы уравнений, составленных по условию задачи. При решении задач удобно составлять таблицу, которая помогает зрительно воспринимать задачу.

Задача 7. Смешали 200 г раствора серной кислоты с массовой долей 20% и 300г раствора серной кислоты с массовой долей 40%. Какова массовая доля соли в полученном растворе?

Решение. Пусть массовая доля соли в полученном растворе равна x%.

Составим таблицу.

Наименование веществ, растворов, смесей,	% содержание кислоты	Масса раствора	Масса вещества
Первый раствор	20%=0,2	200	$200 \cdot 0{,}2=40$
Второй раствор	40%=0,4	300	$300 \cdot 0{,}4=120$
Получившийся раствор	x%=0,01x	500 г	$0{,}01x \cdot 500= 160$

Сумма масс серной кислоты двух первых растворах (то есть в первых двух строчках) равна массе серной кислоты в полученном растворе (третья строка таблицы). Решив это уравнение, получаем х=32. Это означает, массовая доля соли в полученном растворе равна 32 %.

Ответ: 32 %

5.3.1. Решение задач на концентрацию с помощью пропорции

Слово «пропорция» латинского происхождения «proportio», означающее вообще соразмерность, определённое соотношение частей между собой. В древности учение о пропорциях было в большом почёте у пифагорейцев.

Пропорциями пользовались для решения разных задач и в древности, и в средние века и сейчас. Пропорции применяются не только в математике, но и в архитектуре, искусстве. Заслуженное место заняла теория пропорций при решении задач на проценты.

Алгоритм решения задач.

Составление пропорции. Решение пропорции. Ответ задачи

Задача 8. Какова масса лаурилсульфат натрия, содержащегося в 75 г зубной пасты Blend-a-med с массовой долей 2 %. Пусть масса лаурилсульфат натрия равна х г. Составим пропорцию.

75 г – 100%

х г - 2 %

$$\frac{75}{x} = \frac{100}{2}$$

$x = \frac{75 \cdot 2}{100} = 1{,}5$. Итак, масса лаурилсульфат натрия равна 1,5 г.

Ответ: 1,5 г.

Контрольная работа

Вариант I

1. вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-1)$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x+7}-4}{x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x^2+x+1}{6x^2-x+1}$.

2. вычислить производную:

А) $y=3x^3-2x^2+4$ в точке $x_0=-2$; б) $y=(x-1)(x+3)$ в точке $x_0=-2$; в) y=$\frac{x^3-125}{x^2+5x+25}$ в точке $x_0=10$

3. Вычислить производную второго порядка:

А) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$ при x=1; б) y=2x^3-3x^2+x+5 при x=0.

4. Применить первую и вторую производную для исследования функции. Построить график функции: $y=\frac{x^2+x}{x^2-3x+2}$

5. Вычислить интеграл:

а) $\int_1^9(3x^2+2x-\sqrt{x})dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$.

6. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int\sqrt{x^2-4}dx$; б) $\int\frac{3x^2-8x+15}{x^3-6x^2+11x-6}dx$

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0, y=\sqrt{2x-1}, x=5, x=13.$

8. Используя формулы вероятности событий, решить задачи:

А) сколько существует вариантов распределения 4 путевок в санаторий, если претендует 8 человек?

Б) на флюорографию пришли 15 мужчин и 12 женщин. На снимок раздеваются по 2 человека. Определить вероятность того, что первыми войдут на снимок 2 женщины.

9. Используя определения математической статистики выполните задания:

а) На прием к педиатру обратилось 16 больных, возраст которых 11, 9, 15, 11, 3, 2,12,11,10, 12, 11, 3, 2,12,11,10 лет. Укажите медиану, моду, размах данного массива. По данному условию составить частотную таблицу.

10. Задача на применение математических расчетов в медицинской практике.

Больной принимает лекарство по следующей схеме: в 1-ый день он принимает 2 капли, а в каждый следующий день на 2 капели больше, чем в предыдущий. Дойдя до нормы 30 капель в день, он три дня пьет по 30 капель лекарства, потом ежедневно уменьшает прием на 2 капели меньше, доведя до 2-х капель в последний день. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 50 мл лекарства.

Вариант II

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-11)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+2}-5}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x+5}{7x^2-x+1}$.

2. Вычислить производную:

а) $y=x^3-3x^2+4$ в точке $x_0=-10$; б) $y=(x^2-1)(x-4)$ в точке $x_0=2$; в) y=$\dfrac{x^3-1}{x-1}$ в точке $x_0=5$

3. Вычислить производную второго порядка:

а) $y=x^3-3x^2+4$ при x=1; б) $y=\frac{1}{3}-4x+2{,}5x^2-\frac{1}{3}x^3$ при x= -3.

4. Построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-4$: применить теорему о необходимости и достаточности условия существования экстремума

5. Вычислить интеграл:

а) $\int\limits_0^1(x^2+5\sqrt{x}-1)dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x dx$,

6. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int\sqrt{x^2+1}dx$; б) $\int\dfrac{2x^2+5x}{-4x^3+4x^2+9x-9}dx$

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x^2-1)}$, y=0, x=1,x=2.

8. Используя формулы вероятности событий, решить задачи:

а) Сколько существует вариантов распределения двух путевок в санаторий, если претендует 5 человек?

б) В лабораторию для сдачи анализов пришло 7 мужчин и 3 женщины.

а) Определить вероятность того, что первым в кабинет войдет мужчина.

в) Определить вероятность того, что первым в кабинет войдет женщина.

9. Используя определения математической статистики выполните задания:

а) Методы статистического наблюдения предполагают выявить моду, медиану, среднюю арифметическую, размах вариационного ряда. Указать данные значения. Составить по данному графику частотную таблицу:

10. Задача на применение математических расчетов в медицинской практике.

Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Вариант III

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 13}(x^2+31)$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{4x^2-x+1}$.

2. Вычислить производную:

а) $y=x^3-3x^2+4$ в точке $x_0=2$; б) $y=(x-1)(x-4)$ в точке $x_0=-2$;

в) $y=\dfrac{x^3-125}{x-5}$ в точке $x_0=-1$

3. Вычислить производную второго порядка:

а) $y=x^3-3x^2+4$ при х=1; б) $y=\dfrac{1}{3}-4x+2{,}5x^2-\dfrac{1}{3}x^3$ при х= -3.

4. Применить первую и вторую производную для исследования функции. Построить график функции: $f(x)=x^3-3x^2$

5. Вычислить интеграл:

а) $\int\limits_0^1\left(x^2+5x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$, г).

6. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int\sqrt{x^2-1}dx$; б) $\int\dfrac{4x^2-3x+5}{x^3+2x^2-x-2}dx$

7. Вычислить площадь фигуры, расположенной в I координатной четверти и ограниченной линиями $y=x^3-3x^2+1$, $x=0, y=0$.

8. Используя формулы вероятности событий, решить задачи:

а) Сколько существует вариантов распределения трех путевок в санаторий, если претендует 7 человек?

б) На флюорографию пришли 17 мужчин и 14 женщин. На снимок раздеваются по 2 человека. Определить вероятность того, что первыми войдут на снимок 2-ое мужчин.

9. Используя определения математической статистики выполните задания:

а) За сутки в родильное отделение поступило 6 рожениц, возраст которых 21, 19, 25, 21, 36, 32. Укажите медиану, моду, размах данного массива.

10. задача на применение математических расчетов в медицинской практике.

Больной принимает лекарство по следующей схеме: в 1-ый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день на 5 капель больше, чем в предыдущий. Дойдя до нормы 40 капель в день, он три дня пьет по 40 капель лекарства, потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель меньше, доведя до 5-ти капель в последний день. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 29 мл лекарства.

Вариант IV

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 3}(2x^3 - 50)$; б); б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{28x^2 + 28x + 1}{7x^2 - 5x + 1}$; в) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 12x + 32}{x - 8}$.

2.Вычислить производную:

а) $y = x^3 - x^4 - 2x^2$ в точке $x_0 = -6$; б) $y = (x^2 - 10)(x + 4)$ в точке $x_0 = -2$;

в) y=$\dfrac{x^3 - 2\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$ в точке $x_0 = \sqrt{2}$

3. Вычислить производную второго порядка:

а) y=$x^5 + \frac{1}{3}x^4 + 2x^3 + 4$ в точке x=1;

б) $f(x) = 3x^4 + x + 1$; в точке x=10

4. Применить первую и вторую производную для исследования функции. Построить график функции: $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$.

5. Вычислить определенный интеграл:

а) $\int\limits_1^2 (3x^2 - 2 - x^3)dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

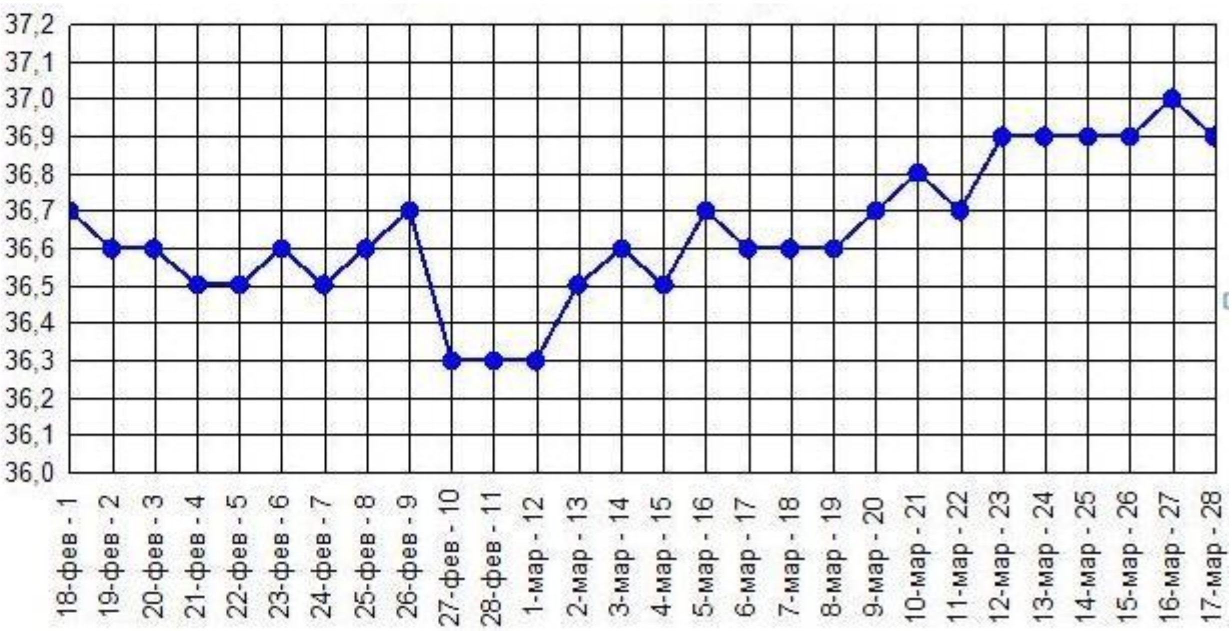
6. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int \sqrt{x^2 - 2}dx$; б) $\int \frac{8x^2 - x + 15}{x^3 + 14x^2 + 35x - 50}dx$

7.Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{-8}{x}$ и прямыми $y = 0, x = -1, x = -2$

8.Используя формулы вероятности событий, решить задачи:
а) С фармацевтического склада поступило 1000 упаковок перевязочного материала. На упаковке присутствует надпись «стерильно». При осмотре 5 упаковок оказались бракованными. Определить вероятность поступления стерильного товара.
б) Из 30 поставленных на учет больных в участковой поликлинике 12 человек с гипертоническим заболеванием, 15 человек с ИБС, 5 человек диагностированы с заболеваниями гипертонии и ИБС одновременно, а остальные – с другими заболеваниями. Какова вероятность того, что из всех «историй болезней» наудачу выбранная «история болезни», окажется только с гипертоническим заболеванием.

9. Методы статистического наблюдения предполагают выявить моду, медиану, среднюю арифметическую, размах вариационного ряда. Указать данные значения. Составить по данному графику частотную таблицу:



10. Дан график дежурств в аптеке № 3

с 1 по 31 мая для круглосуточного дежурства 7-ми фармацевтов:

1) Беркутова З. И.: 1,3,4,5,10,12,24;

2) Ембекова И. М.:2,3,10,17,24,25,26;

3) Алимова В. П.:1, 4,11,12,21,26,28;

4) Патрикеев С.И.: 2,6,7,13,14,20,27,30;

5) Резвова Е. С.:8,9, 15,16,18,19,22,29,31;

6) Щенникова Г. О.: 8,9, 15,16,18,19,22,29,31

7) Борисова Т. Н.:6,7,13,14,17,23,30.

* Составить график дежурства без перегрузок, с учетом того, что у Патрикеева С.И. и Борисовой Т.Н. дежурства не совпадут (семейная пара не могут оставить детей одних дома)

Вариант V

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^4-156)$; б); б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{35x^2+28x+1}{7x^2-5x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-17x+66}{x-6}$.

2.Вычислить производную:

а) $y=x^3-3x^4+21x^2$ в точке $x_0=2$; б) $y=(x-10)(x^2+4)$ в точке $x_0=4$;

в) у=$\dfrac{x^3-5\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}$ в точке $x_0=\sqrt{5}$

3. Вычислить производную второго порядка:

а) $y=x^5+\frac{1}{3}x^4+2x^3+4$ в точке х=2;

б) $f(x)=3x^4+x+1;$ в точке х=5

4. Построить график функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$: применить теорему о необходимости и достаточности условия существования экстремума, использовать предел для нахождения асимптоты.

5. Вычислить определенный интеграл:

а) $\int\limits_1^2(6x^2-12-8x^3)dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos x dx$.

6. Найти неопределенный интеграл:

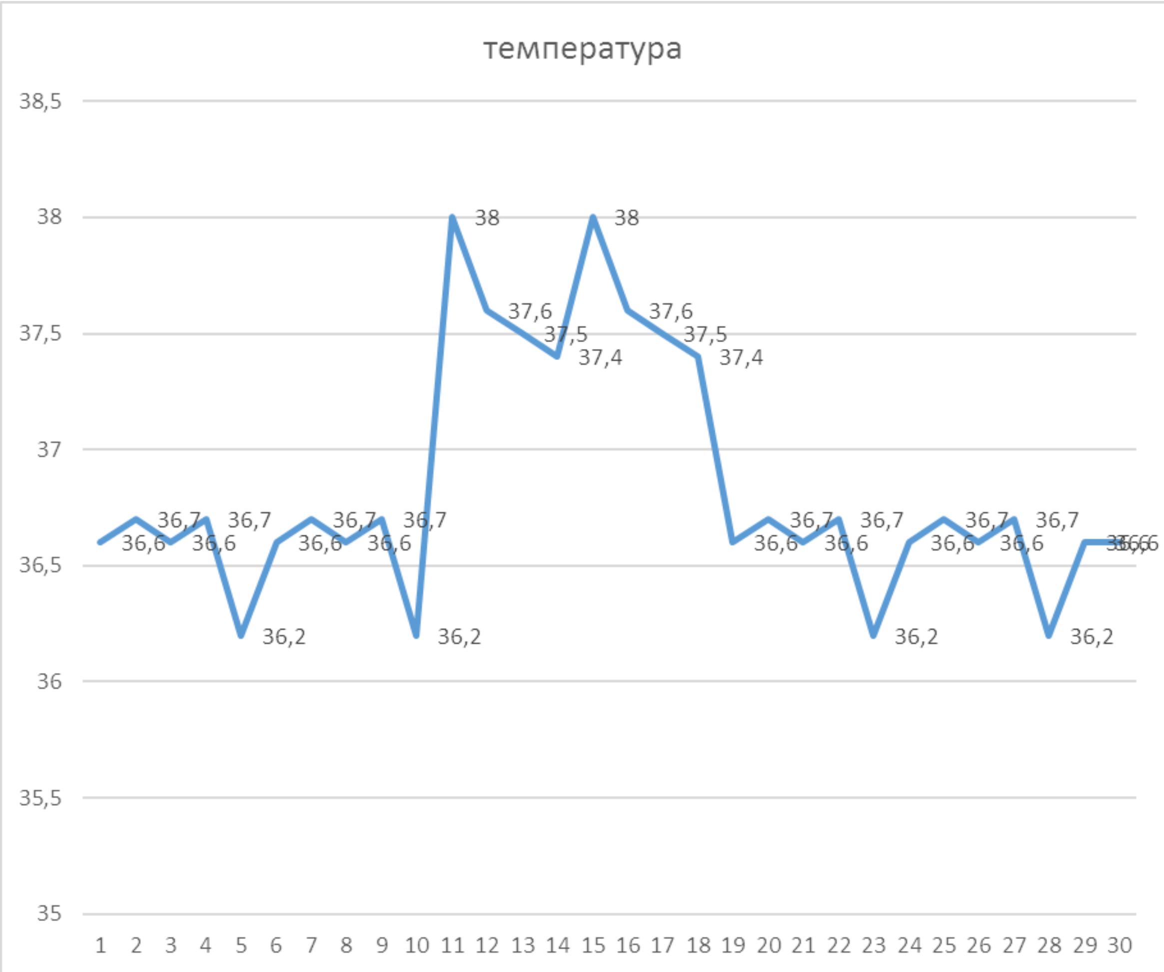
а) $\int\sqrt{x^2-2}dx$; б) $\int\dfrac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$

7.Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y=\dfrac{8}{x}$ и прямыми $y=0, x=e, x=2e$

8.Используя формулы вероятности событий, решить задачи:

а) С фармацевтического склада поступило 100 упаковок перевязочного материала. На упаковке присутствует надпись «стерильно». При осмотре 2 упаковки оказались бракованными. Определить вероятность поступления стерильного товара.
б) Из 30 поставленных на учет больных в участковой поликлинике 12 человек с гипертоническим заболеванием, 15 человек с ИБС, 5 человек диагностированы с заболеваниями гипертонии и ИБС одновременно, а остальные – с другими заболеваниями. Какова вероятность того, что из всех «историй болезней» наудачу выбранная «история болезни» окажется только с гипертоническим заболеванием.

9. Методы статистического наблюдения предполагают выявить моду, медиану, среднюю арифметическую, размах вариационного ряда. Указать данные значения. Составить по данному графику частотную таблицу, если температура 36,6 была 10 раз:



10. Дан график дежурств 8-ми бригад скорой помощи с 1 по 31 января:

1) Бригада №1, №5: 1,3,4,5,12,18,24, 28;

2) Бригада №2, №3:2,9,10,15,19,25,26, 29;

3) Бригада №6, №4: 6,13,14,17,21,23,31;

4) Бригада №7, № 8: 7, 8,11 ,16,20,22,27,30;

* Составить график дежурства без перегрузок с равным интервалом: отдых - дежурство

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апанасов П.Т. Сборник задач по математике: учебное пособие для техникумов./П.Т. Апанасов, М.И. Орлов – М.: Высшая шк., 2000.
2. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа. 10(11) кл. –М., 2000.
3. Атанасян Л.С. Геометрия. 10(11) кл.-М., 2000.
4. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учебное пособие для ссузов.- 3-е изд.,-М.:Дрофа, 2006.
5. Башманов М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10 кл.-М., 2005.
6. Башманов М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 11 кл.-М., 2005.
7. Гилярова М.Г. Математика для медицинских колледжей.- Изд.2-е, доп. и перераб.- Ростов н/Д: Феникс, 2013.
8. Есаулкова О.В. Сборник лекций по математике: учеб. пособие для студентов.-С.Оскол., 2005.
9. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб.пособие для техникумов. -М.: Высш.шк.,1991.
10. Математика: пособие для студентов медицинских училищ и колледжей.-М.: ВУНМЦ, 2005.
11. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник.2-е изд., стер. -М.: Академия; Мастерство, 2002.